専門科目 (午前)　　　　20　大修
数理・計算科学

時間 午前 9 時 30 分 – 午後 1 時

注意

1. 専門基礎問題，　問 1，問 2，問 3 より 2 問を選択 し解答せよ．
2. 専門一般問題，　問 4〜問 12 より 3 問を選択 し解答せよ．
3. 解答は 1 問ごとに 別々の解答用紙に記入 せよ．
4. 要求された問題数をこえて解答した場合は 採点されない 可能性がある．
5. 解答用紙ごとに必ず 問題の番号および受験番号 を記入せよ．

問 1 (基礎問題)

次の行列を考える．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

任意の自然数 n に対して，行列 A^n の要素を n の関数として具体的に表したい．そこで次のような手順を踏んで求めていく．

(1) 行列 A の固有方程式は単根を1つ（λ_1 とする）と重根を1つ（λ_2 とする）もつ．これらの固有値 λ_1, λ_2 と，それらに対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) この場合，行列 A はある正則行列 P を用いて

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

というジョルダン標準形に変形できる．P の第1列を $\boldsymbol{x}_1$, 第2列を $\boldsymbol{x}_2$, 第3列を $\boldsymbol{x}_3$, つまり

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

とすると，$\boldsymbol{x}_1$ は固有値 λ_1 に対応する固有ベクトル，$\boldsymbol{x}_2$ は固有値 λ_2 に対応する固有ベクトルであることを示せ．また，$\boldsymbol{x}_3$ は方程式

$$A\boldsymbol{x}_3 = \lambda_2 \boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{x}_2 \tag{1.4}$$

を満たすことを示せ．

(3) 固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ には定数倍の自由度があり，また $\boldsymbol{x}_2$ が与えられたとき上の方程式 (1.4) を満たす $\boldsymbol{x}_3$ も一意には決まらないが，これらを適当にとって並べた (1.3) の P は A のジョルダン標準形 (1.2) を導く際の正則行列の役割を果たす．(1.1) の A に対して，行列 P および P^{-1} を一組，具体的に求めよ．

(4) これらの結果を利用して，自然数 n に対して，A^n の第1行，第1列要素 $a_{11}^{(n)}$ を，n の関数として具体的に表せ．

問 2 (基礎問題)

以下の設問に答えよ．ただし，n は自然数とする．

(1) 与えられた数列 $\{a_n\}$ が，

$$\begin{aligned} &a_n > a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ &\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \end{aligned}$$

をみたすとする．$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$ とおくとき，極限 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が存在することを証明せよ．

(2) 次の極限

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x+1} dx$$

が存在することを証明せよ．

問 3 (基礎問題)

空でない集合 X とその上の 2 項関係 $\preceq$ に関する以下の 3 条件を考える．

反射性 $\forall x \in X(x \preceq x)$

推移性 $\forall x, y, z \in X\Big(\big((x \preceq y)\text{ かつ }(y \preceq z)\big)\text{ ならば }(x \preceq z)\Big)$

反対称性 $\forall x, y \in X\Big(\big((x \preceq y)\text{ かつ }(y \preceq x)\big)\text{ ならば }(x = y)\Big)$

反射性と推移性が成り立つとき $\langle X, \preceq\rangle$ は擬順序集合であるといい，反射性と推移性と反対称性が成り立つとき $\langle X, \preceq\rangle$ は順序集合であるという．また，X の要素 m が条件

$$\forall x \in X(x \preceq m)$$

を満たすならば，m は $\preceq$ に関する最大要素である，という．

(1) $\langle X, \preceq\rangle$ を順序集合とする．このとき $\preceq$ に関する最大要素は，存在するならばただひとつであることを証明せよ．

(2) アルファベット $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}$ から成る文字列中の，a を文字列 α に，b を文字列 β に，c を文字列 γ にそれぞれ同時に置き換える変換を

$$[\mathsf{a} := \alpha, \mathsf{b} := \beta, \mathsf{c} := \gamma]$$

と書く．たとえば

$$\mathtt{abac}[\mathsf{a} := \mathtt{aca}, \mathsf{b} := \mathtt{b}, \mathsf{c} := \mathtt{b}] \ = \ \mathtt{acabacab}$$

である．そして，Σ の要素だけから成る長さ 1 以上の有限文字列全体を Σ^+ と書き，Σ^+ 上の 2 項関係 $\preceq$ を次で定義する．

$$\alpha \preceq \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \Sigma^+\Big(\alpha[\mathsf{a} := \gamma_1, \mathsf{b} := \gamma_2, \mathsf{c} := \gamma_3] \ = \ \beta\Big)$$

（すなわち，α に適当な代入を施せば β になる）

このとき，次のふたつを証明せよ．

(2-1) $\langle \Sigma^+, \preceq\rangle$ は擬順序集合である．

(2-2) $\langle \Sigma^+, \preceq\rangle$ は順序集合でない．

問 4 (一般問題)

X を実ヒルベルト空間とし，$\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\| \cdot \|$ はそれぞれ X の内積，ノルムを表すとする．X の点列 $\{x_n\}$ が $x \in X$ に弱収束するとは，任意の $y \in X$ に対して

$$\lim_{n \to \infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle$$

となるときをいう．次の設問に答えよ．

(1) X の点列 $\{x_n\}$ が $x \in X$ に弱収束するとする．このとき，

$$\|x\| \leq \varliminf_{n \to \infty} \|x_n\|$$

を示せ．

(2) (1) において，X が N 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ の場合は等式が成り立つことを示せ．

(3) (1) において，等式が成立しない例を挙げよ．

問 5 (一般問題)

(1) $n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ とする．合同式

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv n \pmod 8$$

をみたす整数の組 (x,y,z) が存在しない n を全て挙げよ．

(2) 方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 = 112$$

をみたす整数の組 (x,y,z) が存在するならば，例を挙げよ．存在しないならば，そのことを示せ．

問 6 (一般問題)

a, b を実定数とする．$x \geq 0$ 上の連続関数 $f(x)$，自然数 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{du(x)}{dx} + au(x) = \dfrac{f(x)}{n} \quad (x > 0) \\ u(0) = b \end{cases}$$

の解を $u_n(x)$ とする．各点 $x \in [0, \infty)$ で $\displaystyle\lim_{n \to \infty} u_n(x)$ を求めよ．

問 7 (一般問題)

実数パラメータ s を含んだ線形計画問題

$$
\begin{array}{rlllllll}
\text{目的：} & 2x_1 & +3x_2 & +(8-2s)x_3 & & & \to & \text{最小化} \\
\text{条件：} & 2x_1 & +2x_2 & +6x_3 & -x_4 & & = 6, & \\
 & x_1 & +2x_2 & +4x_3 & & -x_5 & = 4+2s, & \\
 & \multicolumn{7}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0}
\end{array}
$$

に対して，以下の問に答えよ.

(1) $s = 0$ のとき，$x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = x_4 = x_5 = 0$ はこの問題の最適解であることを示せ.

(2) 条件 $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ を満たす最適解が存在する s の範囲を示せ.

問 8 (一般問題)

F, G をともに 1 次元分布関数とし，それぞれ逆関数 F^{-1}, G^{-1} を持つものとする．以下の問に答えよ．ただし P は確率を表し，E は期待値を表す．

(1) U を $(0,1)$ 上の一様分布にしたがう確率変数とするとき，$X = F^{-1}(U)$ が分布 F にしたがう確率変数となることを示せ．

(2) 次の 3 つの命題 (A), (B), (C) が同値であることを示せ．ただし，2 つの確率変数 X, Y に対して，$\mathrm{P}\{X \leq Y\} = 1$ であり，かつ期待値 $\mathrm{E}(X), \mathrm{E}(Y)$ が存在するとき，$\mathrm{E}(X) \leq \mathrm{E}(Y)$ が成り立つことを証明なしで用いて構わない．

(A) 任意の実数 a に対して $F(a) \geq G(a)$.

(B) 分布 F にしたがう確率変数 X と分布 G にしたがう確率変数 Y の組 (X, Y) で，$\mathrm{P}\{X \leq Y\} = 1$ となるものが存在する．

(C) X を分布 F にしたがう確率変数，Y を分布 G にしたがう確率変数とするとき，期待値 $\mathrm{E}(f(X))$, $\mathrm{E}(f(Y))$ が存在するような任意の非減少関数 f に対して，$\mathrm{E}(f(X)) \leq \mathrm{E}(f(Y))$.

(ヒント: (A)⇒(B), (B)⇒(C), (C)⇒(A) を示すと良い．)

問 9 (一般問題)

θ は $0 \leq \theta \leq 1$ である未知パラメータ，$X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ は互いに独立な $2n$ 個の確率変数とする．但し，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ は二項分布 $\mathrm{B}(m, \theta)$ に従い，$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ は二項分布 $\mathrm{B}(m, \theta^2)$ に従うとする．また，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ と $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ の標本平均をそれぞれ $\overline{X}$, $\overline{Y}$ と置く．

(1) θ の尤度関数 $L(\theta)$ を求めよ．

(2) 区間 $[0, 1]$ 中で尤度関数が最大値を取る θ の値 (つまり最尤推定量) $\widehat{\theta}$ を m, $\overline{X}$, $\overline{Y}$ で表せ．

問 10 (一般問題)

定数 1，足し算 +，掛け算 * の 3 種類の記号だけを使ってできる列で，前置記法（ポーランド記法ともいう）の式になっているもの全体の集合を $\mathcal{E}_1$ とする．正確には，$\mathcal{E}_1$ は次の文脈自由文法で定義される文脈自由言語である．

終端記号：1, +, *
非終端記号：E
開始記号：E
生成規則：

$$\begin{array}{lcl} E & \to & \texttt{1} \\ E & \to & \texttt{+}EE \\ E & \to & \texttt{*}EE \end{array}$$

同様に，定数 2，足し算 +，掛け算 * の 3 種類の記号だけを使ってできる列で，前置記法の式になっているもの全体の集合を $\mathcal{E}_2$ とする．そして自然数 $N \geq 1$ に対して，$\mathcal{E}_1$ の部分集合 $\mathcal{E}_{1,N}$ と $\mathcal{E}_2$ の部分集合 $\mathcal{E}_{2,N}$ を次で定義する．

$$\mathcal{E}_{1,N} = \{w \in \mathcal{E}_1 \mid w \text{ を式として評価したときの値が } N \text{ 以下 }\}$$
$$\mathcal{E}_{2,N} = \{w \in \mathcal{E}_2 \mid w \text{ を式として評価したときの値が } N \text{ 以下 }\}$$

たとえば，式　***111+11　を評価すると値は 2 なので（なぜなら $((1 \times 1) \times 1) \times (1+1) = 2$ である），これは $\mathcal{E}_{1,5}$ の要素である．また，式　+**22*222　の値は 18 なので（なぜなら $((2 \times 2) \times (2 \times 2)) + 2 = 18$ である），これは $\mathcal{E}_{2,10}$ の要素ではない．

(1) $\mathcal{E}_{1,2}$ が正規言語でないことを示せ.（後に述べる「ポンピング補題」を用いてよい.）

(2) 任意の $N \geq 1$ に対して，$\mathcal{E}_{2,N}$ が正規言語であることを示せ.

(3) 任意の $N \geq 1$ に対して，$\mathcal{E}_{1,N}$ が文脈自由言語であることを示せ.

（ヒント：ポンピング補題）言語 $\mathcal{L}$ が正規言語であるとき，以下のような数 p（ポンピング長）が存在する．

s が $|s| \geq p$ であるような $\mathcal{L}$ の任意の文字列であるとき，s は次の条件を満たすように 3 つの部分 $s = xyz$ に分割できる．

1. 各々の $i \geq 0$ に対して $xy^iz \in \mathcal{L}$
2. $|y| > 0$
3. $|xy| \leq p$

ただし，$|s|$ は文字列 s の長さを表し，y^i は y を i 回連結したものを表す．y^0 は空列となる．

問 11 (一般問題)

単語を次々に読んで単語とその出現回数をデータ構造にしまっておき（登録という），つぎに，単語が与えられたときにその単語の出現回数を返す（検索という）プログラムを作りたいとする．

(1) 用いるデータ構造として，線形リスト，2 分探索木，ハッシュ表を用いることが考えられる．これらを比較し，登録と検索について，時間計算量も含めてそれぞれのデータ構造の利点と欠点を述べよ（全体で 10 行程度）．

(2) データ構造としてハッシュ表を用いるとする．最初に述べたプログラムの仕様のうちの登録に関する次の部分：

- データ構造の初期化の部分
- 単語が１つ与えられたとき，その単語とその出現回数をデータ構造にしまう部分

のアルゴリズムとデータ構造を，Java 風，C 風，Scheme 風のプログラム言語または明確な自然言語を用いて記述し，説明せよ．

異なる単語のハッシュ値が一致（衝突という）したときの処理法を工夫する必要があることに留意せよ．

アルゴリズムを書くときの仮定として，与えられた単語を word とし，単語を与えるとそのハッシュ値を返す関数 hash，必要なら第 2，第 3，. . . のハッシュ値を返す関数があるとしてよい．ハッシュ表のあふれは気にしなくてよい．

問 12 (一般問題)

複数のスレッド（またはプロセス）を単一プロセッサで並行実行する状況を考える．この問題では，以下の仮定が成り立つものとする．

- ある瞬間に実行中のスレッドは高々一つ．
- プログラムの各行は，その行の実行中にスレッドが切り替えられることなく実行される（ただし，後述の acquire 命令は例外である）．
- プログラムの行と行の間では，スレッド切り替えが起こりうる．

たとえば以下の例では，スレッド $\mathtt{T}_1$, $\mathtt{T}_2$ が，変数 x を共有して実行される．スレッド切り替えのタイミングにより，y の最終値は 1 または 2 となる．ただし，=は代入を表す．

$\mathtt{T}_1$	$\mathtt{T}_2$
`x = 1;`	`x = 0;`
	`y = x + 1;`

スレッド間の同期や相互排他のために，ロックを獲得する acquire 命令と解放する release 命令が利用できるものとする．他のスレッドが獲得済みのロックに対し，acquire 命令による獲得を試みると，そこでスレッドはブロックする（別のスレッドに実行権が移る）．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 以下の二つのスレッドが変数 x, y を共有して並行に実行される．共有変数 x, y の初期値がともに 0 のとき，二つのスレッドの実行が終了した時点で (x, y) の組の取りうる値をすべて列挙せよ．

$\mathtt{T}_1$	$\mathtt{T}_2$
`y = x + 1;`	`x = y + 1;`
`y = x + 1;`	`x = y + 1;`
`y = x + 1;`	

(2) 以下の n 個のスレッド $\mathtt{T}_i(0 \le i < n)$ が n 個のロック $\mathtt{lock}_i(0 \le i < n)$ を共有して並行に実行される．なお，$\mathtt{L}_i(0 \le i < n)$ はラベルであり，jump 文と組み合わせることにより，各スレッドは無限ループを構成する．2 以上の各 n に対し，デッドロックが生じる可能性があるかないかを答えよ．理由も明記すること．

$\mathtt{T}_i(0 \le i < n)$

$$
\begin{aligned}
&\mathtt{L}_i\mathtt{:acquire\ lock}_i;\\
&\quad\mathtt{acquire\ lock}_{i+1 \bmod n};\\
&\quad\mathtt{release\ lock}_{i+1 \bmod n};\\
&\quad\mathtt{release\ lock}_i;\\
&\quad\mathtt{jump\ L}_i;
\end{aligned}
$$

(3) 以下の $2n$ 個のスレッド $\mathtt{T}_i(0 \le i < 2n)$ が (2) と同様に並行実行される．このとき，1 以上の各 n に対し，デッドロックが生じる可能性があるかないかを答えよ．理由も明記すること．

$\mathtt{T}_{2j}(0 \le j < n)$	$\mathtt{T}_{2j+1}(0 \le j < n)$
$\mathtt{L}_{2j}\mathtt{:acquire\ lock}_{2j};$	$\mathtt{L}_{2j+1}\mathtt{:acquire\ lock}_{2j+2 \bmod 2n};$
$\mathtt{acquire\ lock}_{2j+1};$	$\mathtt{acquire\ lock}_{2j+1};$
$\mathtt{release\ lock}_{2j+1};$	$\mathtt{release\ lock}_{2j+1};$
$\mathtt{release\ lock}_{2j};$	$\mathtt{release\ lock}_{2j+2 \bmod 2n};$
$\mathtt{jump\ L}_{2j};$	$\mathtt{jump\ L}_{2j+1};$