

ネットワーク構造の局所的な変化と同期現象の関係

小林 直樹 白山 晋

ネットワークの構造とその上で起こる現象の関係をj知ることは重要な意味を持ち、様々な研究がなされている。しかし、それらの研究では、全体のネットワーク構造を対象としているものが多く、局所的な構造を対象としているものは少ない。さらに、現実に存在するネットワークは、全体を変化させることは難しいが、局所構造を変化させることが出来ることは多い。本研究では、このような現状を踏まえて、ネットワークの局所構造の変化と、ネットワーク上で起こる現象の一つである同期現象の関係について探る。

1 はじめに

現在の大規模で複雑なネットワークの研究は、98,99年のワッツ、ストログッツ、バラバシらによるスモールワールド性、スケールフリー性といったネットワークのマクロ的構造のネットワークモデルを用いた理論的解明を契機として始まったとされる[1][2]。それらは、マクロ的構造から、メソスケールの構造(コミュニティ構造)の分析へと移行し、近年では、マクロ、メソ、ミクロの階層構造が注目されるようになっている[3]。

一方、ネットワーク構造がネットワーク上の様々な現象に影響を与えていることが示され、構造と現象の関係を探るという研究が同時に行われるようになる。そのような研究では、主に次の2つのアプローチが用いられている。

一つは、ネットワーク構造を特徴づける統計的指標とそれに対応づけられる現象を調べるという方法である。平均次数、平均頂点間距離、クラスタリング係数と感染症の伝播や情報伝播との関係、次数分散と協調の進化との関係などである。本稿で扱う同期現象に関

しても、同期し易さを示す容易度 θ は、 $\theta \sim \lambda_{max}/\lambda_2$ というように、ラプラシアン行列の第2最小固有値 λ_2 と最大固有値 λ_{max} によって特徴づけられる[5]。また、Bernaldoらは、同期容易度を次数相関によって特徴付けている[7]。

もう一つは、ネットワークに対し何かしらの作用を加えたときに構造から発現する現象を、ネットワークの機能からのものと考え^{†1}、機能を調べるというものである。所与の機能を備えたネットワークをデザインする、あるいは所与の機能を備えるようにネットワークの構造を変化させるという方向性でもある。この中に、ある目的関数に対して最適なネットワーク構造を探る研究がある。花田らは、多目的遺伝的アルゴリズムを用いて目的関数に応じた最適ネットワークを作成する手法を提案している[10]。また、山本らは、同期容易度を目的関数として遺伝的アルゴリズムによって最適ネットワークを設計している[11]。

このような2つのアプローチにより、ネットワーク構造とその上で起こる現象に対して様々な関係性があることがわかってきた。しかしながら、課題も多い。

前者の場合、ある現象と構造の関係を説明する、統計的指標間の関連性の分析が不十分である。例えば、一つの指標のみに着目すると相反する知見が得られる

Influence of local change of the network topology on a synchronization phenomenon.

Naoki Kobayashi, 東京大学工学系研究科システム創成学専攻, School of Engineering, The University of Tokyo.

^{†1} 複雑ネットワークの分野では、現象を機能そのものとして扱う場合もある

ことが少なくない。西川ら [6] は、次数分布がべき乗則に従うネットワークにおいて、べき乗指数と同期容易度 θ との関係性を調べ、べき乗指数が小さくなると、同期容易度が下がり同期しにくくなることを示した。彼らは、べき乗指数が小さいネットワークでは、ハブで情報が停留してしまうため、同期現象が起こりにくくなると考察している。しかし、ハブの影響により同期が容易に達成されるとする研究 [8] もある。このような相反する知見は、情報伝播や協調の進化においても存在する。

後者の場合、局所的な構造との関係性について調べられることが少ない。また、ある目的関数に対して最適なネットワーク構造を生成するという研究では、目的に応じた最適ネットワークの生成手法の提案にとどまり、生じたネットワークの分析が不十分である。

いずれの場合でも、一つの統計的指標で構造を代表させ、その指標にもとづいた現象との関係性の分析という方法には限界があり、いくつかの指標を制御した上で現象の分析を行う必要性が顕在化する。前者においては、次数分布を与え、それ以外の指標を変化させて構造と現象（あるいは機能）との関係を調べるといったものはあるが、後者ではそのようなものは少ない。

そこで、本研究では、後者の中の、最適なネットワーク構造を生成するアプローチを用いて、べき乗則を含む固定された次数分布において、局所構造の変化と現象の関係を調べる。次数分布に注目した理由は以下である。ネットワークの最適化という研究において、生じるネットワークの次数分布のほとんどがガウス分布に近いものになる。一方、実ネットワークの多くがべき乗則に従う次数分布をもち、それがネットワークの特性に影響を与えているという指摘がなされている。例えば、べき乗則に従う次数分布を制約条件として最適化を行ったときに生じるネットワークの性質がわかれば、実世界で観測される現象との関係性を明らかにできる可能性がある。

なお、本研究では、取り扱う現象として、複数エージェントの合意形成をモデル化した同期現象の一つであるコンセンサス問題における収束時間を対象とする。

2 提案手法

2.1 コンセンサス問題

本稿において、局所構造の変化が現象に影響を与えるものとして、ネットワーク上でのコンセンサス問題を扱う。この問題では、媒介中心性のような局所構造が反映される指標と現象との関係性が調べられている。以下、このモデルについて説明する。

はじめに、ノード数 n 、エッジ数 m とし、ノード $V = \{1, 2, \dots, n\}$ 、エッジ $E \subseteq V \times V$ で構成される無向グラフ $G = (V, E)$ を考える。このネットワークのノード i 上のエージェントを i で表す。次に、 t ステップにおけるエージェント i の状態量を $x_i(t)$ とし、次式の推移則によって変化させる。

$$dx_i/dt = \sum_{j \in N_i} (x_j(t) - x_i(t)) \quad (1)$$

ここで、 N_i は、 i の隣接ノードの集合である。式 (1) を離散化すると、

$$x_i(t + \Delta t) = x_i(t) + \Delta t \sum_{j \in N_i} (x_j(t) - x_i(t)) \quad (2)$$

になる。ここで、 Δt は時間刻み幅である。初期状態から式 (2) に従って時間発展させ、すべてのエージェントの状態量が一致したとき、すなわち、

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n \quad (3)$$

のときに収束したとみなす。Olfati Saber ら [4] は、実数の初期状態量、かつ $\Delta t < 1/k_{max}$ であれば、式 (2) が収束することを示している。ここで、 k_{max} は最大次数である。ただし、数値誤差等のため、数値シミュレーションでは、式 (3) を満たすことは難しい。そこで、本稿では、 $t = 0$ における i の状態量 $x_i(0)$ を i とし、時間発展させ、 $\max_i |x_i| - \min_j |x_j| < 0.01$ のとき、収束したことにする。また、初期状態から、収束するまでにかかったステップ数を収束時間と呼ぶことにする。

本稿では、所与のネットワーク（以降基準ネットワークと呼ぶ）に対して、次数分布を変えないつなぎ換えによって局所構造を変化させ、そのネットワークに対して得られる収束時間を観測する。そして、局所構造の変化を表現する指標と、収束時間の変化に分け、それらの関係を分析する。

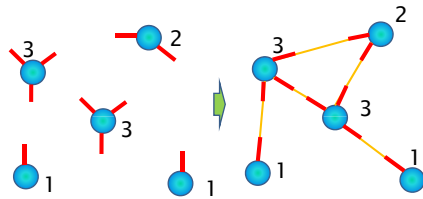


図 1 コンフィグレーションモデル

2.2 基準ネットワーク生成

本稿の目的を考慮すると、基準ネットワークに要求される条件は次のようになる。

1. 所与の度数分布に対して作成可能であること
2. 度数分布以外に依存しない現象に対する局所構造の変化を探るため、同じ度数分布を持ちながら様々な特性を持ったネットワークが作成できること

である。

本稿では、所与の度数分布をもつネットワークをコンフィグレーションモデルによって生成し、XS アルゴリズム [9] によって、度数分布を変えずに、度数相関を変えたネットワークを作成する。次項でコンフィグレーションモデルと XS アルゴリズムについて説明する。

2.2.1 コンフィグレーションモデル

はじめに、ノード数 n 、エッジ数 m を与える。次に、所与の度数分布に基づいて、ノードに度数分のスタブ (stub, 半分のエッジ) を与える (図 1)。その後、すべてのスタブをランダムにリンクする。

2.2.2 XS アルゴリズム

図 2 に XS アルゴリズム [4] の模式図を示す。度数相関を大きくする場合、度数の大きいノード同士、度数の小さいノード同士がリンクするようにつなぎ換えを施す (図 2 右上)。度数相関を小さい方向に変化させたい場合は、度数の最も大きいノードと最も小さいノードをリンクし、その他の 2 ノードをつなぐことにする (図 2 右下)。これにより、度数分布を変化させずに、度数相関が制御できる。

2.3 つなぎ換え分析法

基準ネットワーク生成後、度数分布を固定した状態でネットワークの局所構造を変化させながら、コンセ

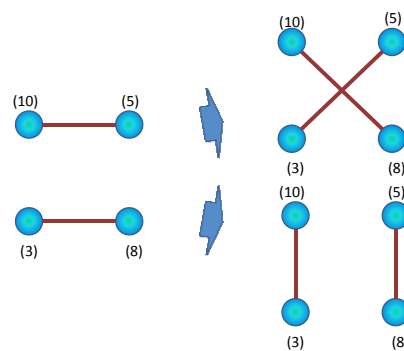


図 2 XS アルゴリズム (カッコ内の数字は度数)

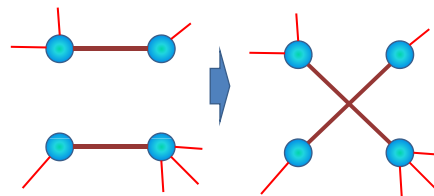


図 3 つなぎ換えの概念図

ンサス問題を数値的に解き、得られる収束時間を観測する。局所構造は以下のように変化させる。

1. ノードの共有がない異なる 2 つのエッジをランダムに選ぶ
2. 図 3 のようにつなぎ換えを行う
3. つなぎ換えによって多重辺が生じる場合は、エッジを選び直す

これらの操作では、つなぎ換えに関わる 4 つのノードの度数が変わらないため、ネットワーク全体の度数分布は変化しない。

本稿では、局所構造の変化を表現する指標として、つなぎ換え前のエッジ両端のノードの媒介中心性の積を用いる。

ネットワーク中の任意の 2 ノードを選び、それぞれを始点と終点とすると、始点から終点の最短経路中に、あるノードが存在する場合、そのノードの媒介中心性は大きくなる。ノード v_i の媒介中心性 B_i を式で示せば、

$$B_i \equiv \frac{\sum_{i_s=1; i_s \neq i}^N \sum_{i_t=1; i_t \neq i}^{i_s-1} \frac{g_i^{(i_s i_t)}}{N_{i_s i_t}}}{(N-1)(N-2)/2} \quad (4)$$

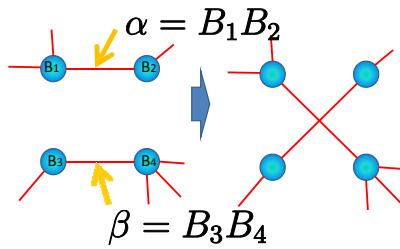


図 4 局所構造の変化を表現する指標

である。ここで、 $g_i^{(i_s i_t)}$ は始点 v_{i_s} から終点 v_{i_t} への最短経路の中で v_i を通るものの数、 $N_{i_s i_t}$ は v_{i_s} から v_{i_t} への最短経路の総数であり、分母は規格化定数である。

本稿では、図 4 のように、つなぎ換え前のエッジ両端の媒介中心性の積 $\alpha = B_1 \cdot B_2$, $\beta = B_3 \cdot B_4$ を計算し、それらを指標にして分析を行う。

3 実験と考察

はじめに局所構造の変化とそれが収束時間に与える影響を分析する。次に、その結果を応用し、所与の収束時間となる、ネットワークがデザインできることを示す。

3.1 局所構造の変化が収束時間に与える影響

以下に実験の概要を示す。

Step1 ノード数 1000, リンク数 6000 とし、2 つの次数分布についてコンフィグレーションモデルによってネットワークを作成する。次数分布については、下表に示すようにスケールフリー性を有するものと、ガウス分布のもの 2 種類を用いる。

Step2 Step1 で作成したネットワークに対して、XS アルゴリズムを用いて、次数相関の高いものと低いものを作成する（結果として、2 つの次数分布と 3 種類の次数相関という特性を持った計 6 個のネットワークが作成される）。

Step3 エッジ両端の媒介中心性の積 α, β を算出する。

Step4 コンセンサス問題の収束時間を求める。

Step5 つなぎ換えを 1 回行う。

Step6 Step3 に戻る。

本稿では、Step3 から Step6 を 100000 回行い、つなぎ換え前の α, β と収束時間を求めた。また、Step1~Step6 を 100 回繰り返す、結果を求めた。図 13 に実験の結果を示す。この図は、 α, β がエッジ上位何パーセントにあるかどうかと、つなぎ換え前後の収束時間の変化の平均を示したものである。結果として以下の知見が得られる。

1. α, β の組み合わせが、大きいものと小さいもの場合、収束時間の期待値が減少する。これは、すべての次数分布、すべての次数相関について成り立つ。
2. 次数分布がガウス分布の場合、 α, β が大きいもの同士の組み合わせのとき、収束時間の期待値は増加する。これは、すべての次数相関について成り立つ。

3.2 ネットワークのデザイン

はじめに、図 13 を考慮し、以下の 3 つの戦略を考える。

戦略 1 エッジを 2 本ランダムに選択し、つなぎ換える。

戦略 2 α, β が両方、エッジ上位 10% に含まれるようにして、つなぎ換えを行う。

戦略 3 α, β の片方をエッジ上位 30% 内、もう片方をエッジ下位 30% 内に含まれるようにして、つなぎ換えを行う。

前節と同様に、次数分布がガウス分布とべき乗分布となるネットワークを作成する。次に、戦略 1, 戦略 2, 戦略 3 に基づいたつなぎ換えを行う。このつなぎ換え後に、コンセンサス問題の収束時間を求める。これらを 100 ステップか繰り返す。

戦略 1 は、前節のものと同じである。戦略 2 と戦略 3 は、前節で得られた α, β と収束時間の関係を考慮したものである。前節の実験からは、戦略 2 のつなぎ換えによって、ガウス分布の場合は収束時間が増大することが予想される。戦略 3 の場合は、両方の分布ともに収束時間が減少すると考えられる。

図 5 と図 6 に結果を示す。図中の横軸はステップ数を、縦軸は収束時間を示す。図からは、ガウス分布の場合、戦略 2 では収束時間が増大し、戦略 3 では

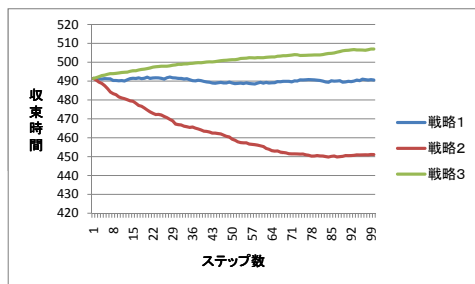


図 5 ガウス分布の場合

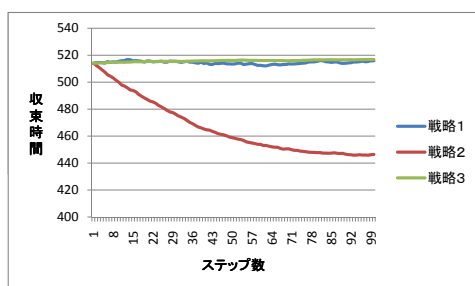


図 6 べき乗分布の場合

減少している。べき乗分布の場合、戦略 3 でのみ収束時間の減少が確認できる。これらの結果は前節の結果から予想されるものと一致する。また、ネットワークのデザインに応用できると考えられる。例えば、図 5 と図 6 は、戦略 2 や 3 のように、 α, β を考慮して、つなぎ換えを行えば、所与の収束時間となるようなネットワークを生成できることを示唆している。

4 結論

本稿では、統計的指標の一つである次数分布を固定したままで、ネットワークの局所構造の変化と、ネットワーク上で起こる現象の一つである同期現象における収束時間の関係を調べるための方法を提案した。

提案手法を用いた数値実験によって、収束時間と媒介中心性の変化の関係を明らかにした。また、媒介中心性を考慮したつなぎ換えによって、所与の収束時間となるようなネットワークを生成できることを示唆した。

参考文献

- [1] ダンカンワッツ著, 栗原聡ら訳: スモールワールド - ネットワークの構造とダイナミクス, 東京電機大学出版局 (2006).
- [2] 増田直紀, 今野紀雄: 複雑ネットワーク 基礎から応用まで, 近代科学社 (2010).
- [3] Ahn, Y.-Y., Bagrow, J.P. and Lehmann, S.: Link communities reveal multiscale complexity in networks, *Nature* 1038, pp.1-5, (2010).
- [4] R. Olfati-Saber, J. A. Fax, and R. M. Murray: Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. *Proceedings of the IEEE*, 95, Jan. (2007)
- [5] L. M. Pecora and T. L. Carroll: *Phys. Rev. Lett.* 80, 2109-2112 (1998)
- [6] T. Nishikawa, A.E. Motter, Y.C. Lai and F.C. Hoppensteadt: *Phys. Rev. Lett.* (2003)
- [7] M. di Bernardo, M. F. Garofalo, and F. Sorrentino, Effects of degree correlation on the synchronization of networks of oscillators. *Int. J. Bifurcat. Chaos* 17, 3499-3506. (2007).
- [8] Y. Moreno, A.F. Pacheco: Synchronization of Kuramoto oscillators in scale-free networkd. *Europhysics Letters*, 68(4), 603-609 (2004)
- [9] R. Xulvi-Brunet, I. Sokolov. Reshuffling scale-free networks: From random to assortative. *Phys. Rev. E*, 70(066102), (2004)
- [10] 花田良子, 佐藤史隆, 廣安知之, 三木光範, 鈴木泰博: 遺伝的アルゴリズムによるネットワーク特性量に着目したネットワーク設計法, *コンピュータソフトウェア*, Vol.24, No. 1, pp. 91-100 (2007).
- [11] 山本聡彦, 生天目章: 進化手法による最適ネットワークの生成, *JAWS2009 論文集*, (2009)

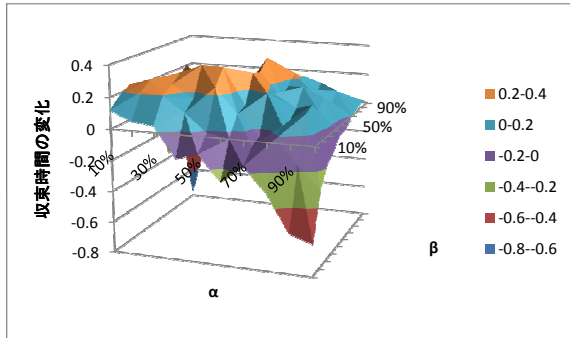


図 7 べき乗分布, 次数相関なし

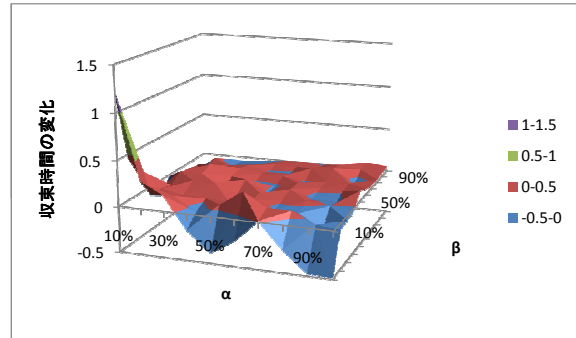


図 8 ガウス分布, 次数相関なし

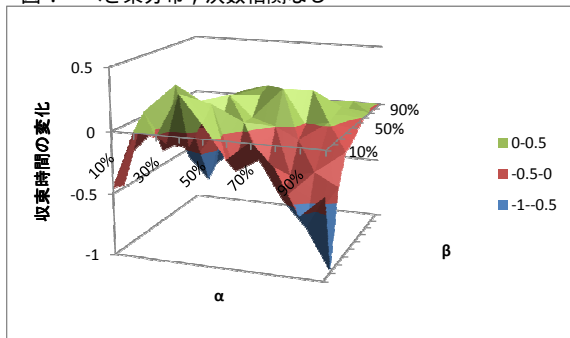


図 9 べき乗分布, 次数相関正

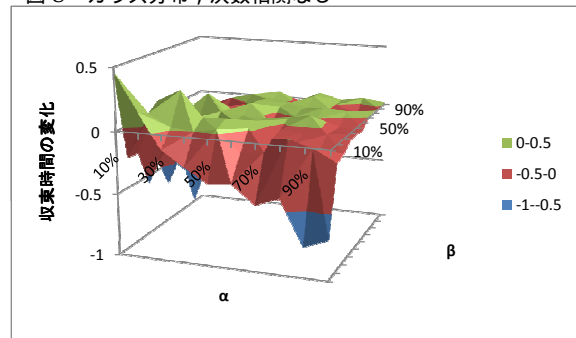


図 10 ガウス分布, 次数相関正

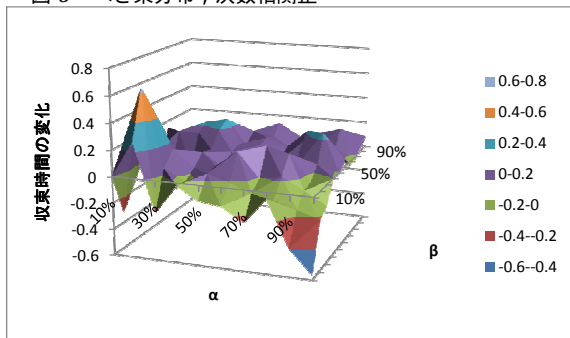


図 11 べき乗分布, 次数相関負

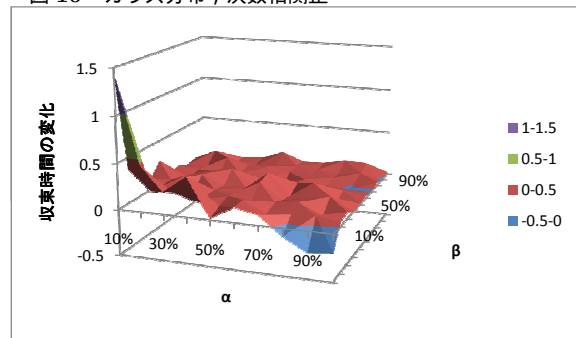


図 12 ガウス分布, 次数相関負

図 13 局所構造の変化と収束時間の関係